No. of Printed Pages : 10 **PHE–014**

BACHELOR OF SCIENCE (B. Sc.)

Term-End Examination

June, 2026

PHE-014 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS-III

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *(i) Attempt* ***all*** *questions.*

(ii) The marks for each question are indicated against it.

(iii) Symbols have their usual meanings.

---

1. Attempt any *five* parts : 5×2=10

(a) What are contravariant vaectors ? Show that acceleration is contravariant vector. 2

(b) Show that the set of all matrices of order $m \times n$ is a group under addition of matrices. 2

(c) Show that the function $f(z) = z^2$ is analytic. 2

(d) Calculate the residue of $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)^2}$. 2

(e) Obtain the Laplace transform of the function $e^{-t} \sin 2t$. 2

(f) Determine the Fourier transform of the function :

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$ 2

(g) For Bessel functions, show that

$J_1(x) = -J_0'(x)$! 2

(h) The Rodrigue's formula for Laguerre polynomials is given by :

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

Obtain the value of $L_2(x)$. 2

2. Attempt any *two* parts : 2×5=10

(a) Verify the Cayley-Hamilton theorem for the rotation matrix M :

$$M = \begin{bmatrix} \cos\theta & \theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$ 5

(b) If a real matrix is both symmetric and orthogonal, show that its eigen values can be only + 1 or – 1. 5

(c) For a quadratic equation $5x^2 - 2xy + 5y^2 = 4$, write down the matrix of coefficients and diagonalize it. Recast it in new variables and identify the conic section it represents. 5

3. Attempt any *two* parts : 2×5=10

(a) Obtain the Taylor series representation of $\log(1 + z)$ about $z = 0$. 5

(b) Calculate the value of the integral $\oint_C \frac{\cos z}{z} dz$ where C is the circle $|z| = 2$.

5

(c) Using the method of residues, obtain the value of the following integral :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta} d\theta$$ 5

4. Attempt any *two* parts : 2×5=10

(a) Obtain the sine transform of the following function : 5

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(b) Using the method of Laplace transforms, solve the following initial value problem :

$y'' - 2y' + 5y = 0;\ y(0) = -1,\ y'(0) = 7$ 5

(c) Calculate the inverse Laplace transform of $\dfrac{3s^2 - 2s - 1}{(s-3)(s^2+1)}$. 5

5. Attempt any *one* part : 1×10=10

(a) The generating relation for Legendre polynomials is given by :

$$g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

Obtain the recurrence relation :

$$(2n + 1)\, x\, P_n(x) - (n + 1)\, P_{n+1}(x) = n\, P_{n-1}(x)$$

Hence obtain the value of $P_2(x)$. 8+2

(b) Using the generating function for Hermite polynomials

$$g(x, t \;= e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_{n}\; x \; \frac{t^n}{n!}$$

obtain the Rodrigues' formula

$$\mathrm{H}_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$ and hence

evaluate $\mathrm{H}_2(x)$. 8+2

PHE–014

विज्ञान स्नातक (बी. एस.-सी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2026

पी.एच.ई.-014 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *सभी प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं। प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।*

1. कोई **पाँच** भाग कीजिए : $5\times2=10$

(क) प्रतिपरिवर्ती सदिश क्या होते हैं ? सिद्ध कीजिए कि त्वरण एक प्रतिपरिवर्ती सदिश है। 2

(ख) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह योग के अधीन कोटि $m \times n$ वाले सभी आव्यूहों का समुच्चय एक समूह होता है। 2

(ग) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(z) = z^2$ विश्लेषिक है। 2

(घ) फलन $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)^2}$ का अवशिष्ट परिकलित कीजिए। 2

(ड़) फलन $e^{-\ t} \sin 2t$ का लाप्लास रूपांतर ज्ञात कीजिए। 2

(च) फलन : $$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

का फूरिये रूपांतर परिकलित कीजिए। 2

(छ) बेसन फलनों के लिए सिद्ध कीजिए कि :

$J_1(x) = -J_0'(x)!$ 2

(ज) लागेर बहुपदों के लिए रोड्रिगेज सूत्र निम्नलिखित द्वारा दिया जाता है :

$$L_n(x) \frac{e^x}{n!} \frac{dx}{dx^n} \ x^n e^{-x}$$

$L_2(x)$ का मान प्राप्त कीजिए। 2

2. कोई **दो** भाग कीजिए : 2×5=10

(क) घूर्णन आव्यूह M के लिए कैले–हैमिल्टन–प्रमेय को सत्यापित कीजिए :

$$M = \begin{bmatrix} \cos\theta & \theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$ 5

(ख) यदि एक वास्तविक आव्यूह सममित और लांबिक दोनों हो, तो सिद्ध कीजिए कि इसके आइगेन मान केवल +1 या – 1 हो सकते हैं। 5

(ग) द्विघात समीकरण

$$5x^2 - 2xy + 5y^2 = 4$$

के गुणांकों का आव्यूह लिखिए और उनका विकर्णन कीजिए। इसे नए चरों में प्रस्तुत कीजिए और बताइए कि यह किस शंकु परिच्छेद को निरूपित करता है। 5

3. कोई **दो** भाग कीजिए : 2×5=10

(क) $z = 0$ के प्रति $\log(1 + z)$ का टेलर श्रेणी निरूपण प्राप्त कीजिए। 5

(ख) समाकल $\oint_C \frac{\cos z}{z} dz$ का मान परिकलित कीजिए जहाँ C वृत्त $|z| = 2$ है। 5

(ग) अवशिष्ट-विधि का उपयोग कर निम्नलिखित समाकल का मान प्राप्त कीजिए :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta} d\theta$$ 5

4. कोई **दो** भाग कीजिए : 2×5=10

(क) निम्नलिखित फलन का फूरिये साइन रूपांतर प्राप्त कीजिए : 5

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0 & |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

(ख) लाप्लास रूपांतर विधि द्वारा निम्नलिखित आदि मान समस्या का हल प्राप्त कीजिए : 5

$$y'' - 2y' + 5y = 0;\ y(0) = -1,\ y'(0) = 7$$

(ग) फलन $\dfrac{3s^2-2s-1}{(s-3)(s^2+1)}$ का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर प्राप्त कीजिए। 5

5. कोई **एक** भाग कीजिए : 1×10=10

(क) लेजान्ड्रे बहुपदों का जनक फलन निम्नलिखित व्यंजक द्वारा दिया जाता है :

$$g(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

इसका उपयोग निम्नलिखित पुनरावृत्ति सम्बन्ध प्राप्त कीजिए :

$$(2n + 1)\, x\, P_n(x) - (n + 1)\, P_{n+1}(x) = n\, P_{n-1}(x)$$

अतएव $P_2(x)$ का मान प्राप्त कीजिए। 8+2

(ख) हर्मिट बहुपदों के जनक फलन

$$g(x, t \;= e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \;\; _n \;\; x \;\; \frac{t^n}{n!}$$

का उपयोग कर रोड्रिगेज़ सूत्र :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

प्राप्त कीजिए। अतएव $H_2(x)$ भी परिकलित कीजिए।

8+2

× × × × ×